数学解答

1

円筒の側面の展開図を描き，図のように点C，D をとると，点 A から線分 CD 上の点 P を経て点 B に向かう最短経路を求めることになる。線分 CD に関して点 B と対称な点 B′ をとると

$$PB = PB'$$

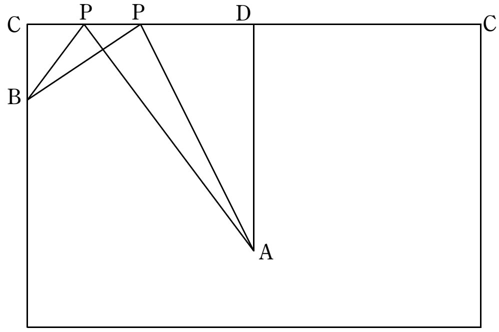
であるから

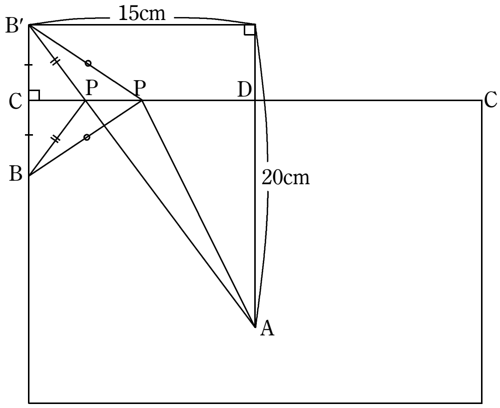
$$AP + PB = AP + PB'$$

となり，これが最小となるのは点 A，P，B′ が同一直線上にあるときであり，最小値は AB′ の長さに等しい。

$$AB'^2 = 15^2 + 20^2 = 625$$

$$\therefore \quad AB' = \underline{25\ [\mathrm{cm}]}$$





2

(1) $4x^4+7x^2+16$

$= 4x^4+16x^2+16-9x^2$

$=(2x^2+4)^2-(3x)^2$

$=\underline{(2x^2-3x+4)(2x^2+3x+4)}$

(2) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$

$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+b^4-2b^2c^2+c^4$

$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2$

$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+\{(b-c)(b+c)\}^2$

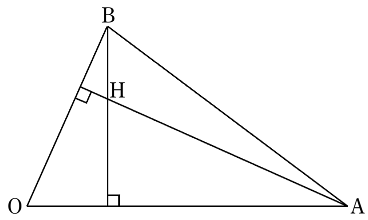
$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b-c)^2(b+c)^2$

$=\{a^2-(b-c)^2\}\{a^2-(b+c)^2\}$

$=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}\{a-(b+c)\}\{a+(b+c)\}$

$=\underline{(a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a+b+c)}$

3 (1)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$　とおく。



$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(s-1)\vec{a}+t\vec{b}$

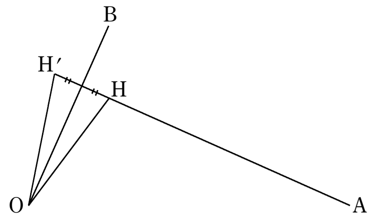
$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\vec{a}+(t-1)\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$　より　$(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

　$2(s-1)+3t=0$　→　$\underline{2s+3t=2}$ ……①

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$　より　$s|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \to 8s+2(t-1)=0 \to \underline{4s+t=1}$ ……②

①, ②より　$s=\dfrac{1}{10}$，　$t=\dfrac{3}{5}$ → $\underline{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{10}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}}$



(2) (1)より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=-\dfrac{9}{10}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\left(1-\dfrac{9}{10}k\right)\vec{a}+\dfrac{3}{5}k\vec{b}$

HH′の中点は　$\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{OH'}})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{11-9k}{10}\vec{a}+\dfrac{3+3k}{5}\vec{b}\right)$

となり，これが OB 上にあるので

$$\frac{11-9k}{10}=0 \ \to \ k=\frac{11}{9} \ \to \ \underline{\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=-\frac{1}{10}\vec{a}+\frac{11}{15}\vec{b}}$$

4

(1)　$\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{n+1-1}{(n+1)!}=\dfrac{n+1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

$$S_n=\left(\frac{1}{1!}-\cancel{\frac{1}{2!}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2!}}-\cancel{\frac{1}{3!}}\right)+\cancel{\cdots\cdots}+\left(\cancel{\frac{1}{n!}}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\underline{1-\frac{1}{(n+1)!}}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{2^k}=S$　とおく。

$$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{10}{2^{10}}$$

$$-\Big)\ \frac{1}{2}S=\qquad\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{9}{2^{10}}+\frac{10}{2^{11}}$$

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{10}}-\frac{10}{2^{11}}$$

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^9}-\frac{10}{2^{10}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{10}{2^{10}}=2\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)-\frac{5}{2^9}=\underline{2-\frac{3}{2^8}}$$